Erde, Mond und Sonne

Π mal Daumen

Ingo Wulf

Dezember 2011

Über eine Sache zu sprechen kann Interesse der Zuhörer wecken, sie vorzuführen kann die Neugier der Zuschauer vertiefen. Die Erfahrung aber, es selbst zu tun, ist für das Verständnis der Sache kaum zu überschätzen. [1)]

Oft wird es von Schülern als unbefriedigend empfunden, wenn sie die Ankündigung hören: wir machen dies oder das, und dann folgt etwas, worin der Anteil des eigenen Handelns sehr gering ist. Oft werden die wirklich interessanten Teile der Sache nicht selbst gemacht. Manchmal macht sie der Lehrer, manchmal wird nur darüber geredet. In der nachfolgenden Skizze wird angeregt, den Anteil der eigenen Erfahrung möglichst groß zu machen. Jeder mag nach den Umständen selbst beurteilen, wie weit dies umzusetzen ist.

Ein Schulprojekt zur Anwendung des Strahlensatzes forderte dazu auf, „unzugängliche“ Objekte zu vermessen. Das inspirierte die nachfolgend vorgestellte Untersuchung: Wäre es Eratosthenes und seinen Zeitgenossen möglich gewesen, die Entfernung Erde – Sonne und die Größe der Sonne zu bestimmen? Es wird unterstellt, man habe zu jener Zeit wohl den Strahlensatz aber keine Winkelfunktionen gekannt und Meßgeräte verwendet, deren Genauigkeit etwa der eines Jakobstabs entspricht. Unter diesen Voraussetzungen scheinen etwa astronomische Parallaxenmessungen wenig geeignet. Statt dessen wird vorgeschlagen, die Schatten zu vergleichen, die Mond und Erde bei Finsternissen auf den jeweils anderen Himmelskörper werfen und daraus auf die Entfernung Erde – Sonne und den Durchmesser der Sonne zu schließen.
Jeder einzelne Schritt der nachfolgenden Überlegungen sollte von den Schülern in Zweifel gezogen und geprüft werden.

1) nach Konfuzius

Erdumfang nach Eratosthenes

Eratostenes (-276, -194) lebte im griechisch geprägten Alexandria. Er war Mathematiker und Astronom und leitete die Bibliothek von Alexandria. Ihm wird ein Verfahren zugeschrieben, mit dem er um 240 v. Chr. den Erdumfang bestimmte. Er maß den Schattenwurf in Alexandria zu einem Zeitpunkt, als die Sonne im weiter südlich gelegenen Syene im Zenit stand und Pfähle keine Schatten warfen und Brunnen völlig ausgeleuchtet wurden.

Eratosthenes verstand, daß der Winkel, der dem Schatten des Schattenstabs entsprach, die Differenz der geographischen Breiten von Syene und Alexandria darstellt. Das illustriert folgende Grafik.

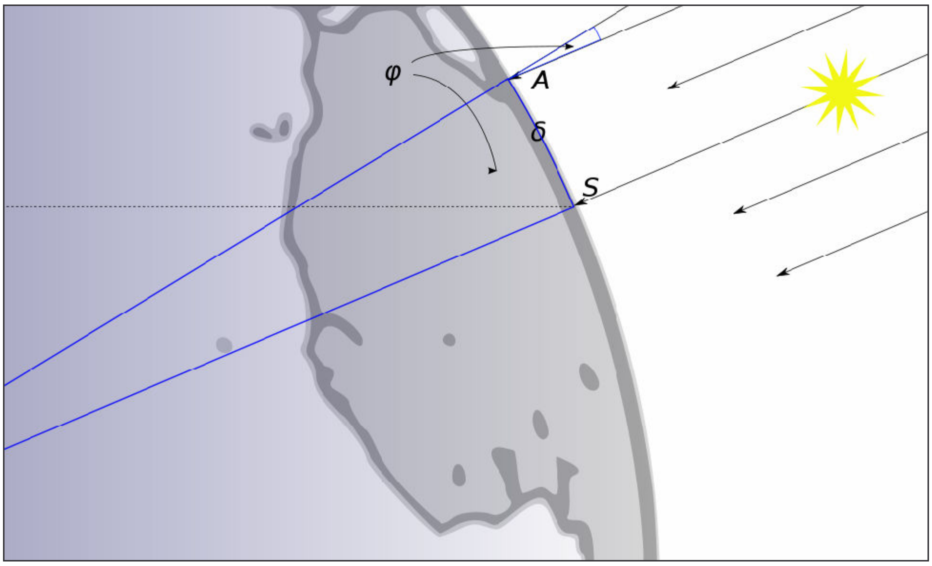

Abbildung 1: Zur Bestimmung des Erdumfangs durch Eratosthenes, Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes

Eratosthenes kannte die Entfernung zwischen den beiden Orten, die am Nil fast auf demselben Meridian liegen und konnte nun den Erdumfang bestimmen. Die Winkeldifferenz Alexandria-Syene verhält sich zur Entfernung Alexandria-Syene wie der Vollkreis (360°) zum Erdumfang. Eratosthenes kam auf 252000 Stadien bzw. das Fünfzigfache der Entfernung Alexandria – Syene. [1) 2) 3)]

Man kann die Arbeit des Eratosthenes nachstellen, indem man den Nil z.B. durch den Rhein sowie Alexandria und Syene durch Oberhausen und Zürich ersetzt oder andere geeignete Orte wählt. Dabei erkennt man schnell, welche günstigen Umstände dem Bibliothekar die Sache erleichterten. Er konnte die Messung ganz allein vornehmen und mußte nicht dafür sorgen, daß an zwei Orten zur selben Zeit Messungen durchgeführt werden.

In Mitteleuropa werden wir zwei zeitgleiche Messungen benötigen. Dies hört sich einfacher an als es ist. Zwar können wir per Telefon gegen Mittag schnell klären, ob am Standort des Partners die Sonne scheint, die Erfahrung zeigt jedoch, daß dies seltener der Fall ist, als man wünschen mag. Also wird dieser Teil der Sache die Geduld der Beteiligten fördern, die sicherlich eine Tugend in der wissenschaftlichen Arbeit ist.

Man kann bei der Schattenmessung Freunde einbeziehen, die zufällig in einer geeigneten Gegend wohnen oder das Projekt zusammen mit einer weiteren Schule durchführen. Die Entfernung zwischen den Orten wird man leicht mit Google-Earth ermitteln können. Wem das schon zu viele „Fremddaten“ sind, mag schauen, ob er ein geeignetes Stück Nord-Süd-Straße findet, um etwa bei einer Radtour die Entfernung selbst zu messen.

Zur Messung des Schattens ist zu bemerken, daß selbst diese vermeintlich einfache Übung durch verschiedene Fehler beeinträchtigt werden kann:

- Es ist darauf zu achten, daß der Schattenwerfer senkrecht steht und die Projektionsfläche des Schattens eben und waagerecht ist. Mit Lot und Wasserwaage ist dies leicht zu prüfen, bedarf aber vielleicht der Übung durch die Schüler.
- Die Sonne darf nicht durch Wolken verdeckt werden. Selbst dünne Wolkenschleier können die Messung erheblich verfälschen. Jeder kann dies leicht prüfen, wenn er die Veränderung des Schattens in einer solchen Situation beobachtet.
- Der Schattenwerfer sollte von „handlicher“ Größe sein. Es nützt nichts, einen großen Schattenwerfer zu verwenden, wenn man die Länge des Schattens nicht hinreichend genau bestimmen kann. Erfahrungsgemäß ist es hilfreich, die Sache so einzurichten, daß sie auf einem Tisch stattfinden kann.

Man kann diese Messungen mit verschiedenen Gruppen parallel durchführen und die Ergebnisse vergleichen und Fehlerquellen diskutieren. Die Schüler sollten angehalten werden, über ihre Beobachtungen sorgfältig Protokoll zu führen.

Die Bestimmung des Winkels aus der Schattenlänge und der Höhe des Schattenwerfers kann auf verschiedene Weise vorgenommen werden, deren Wahl sich selbstverständlich nach den Kenntnissen der Schüler richtet.

mit der Tangensfunktion
Schattenwerfer, Schatten und die Verbindungslinie zwischen den Endpunkten von Schattenwerfer und Schatten bilden ein (rechtwinkliges) Dreieck.

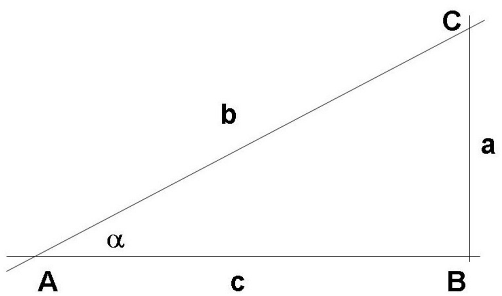

Abbildung 2: schematische Verhältnisse beim Schattenwurf

Man berechnet das Verhältnis von Gegenkathete a (Schattenwerfer) und Ankathete c (Schattenlänge) und gewinnt den Tangens des Winkels α und daraus den Winkel selbst. Am anderen Ort verfährt man entsprechend und ermittelt in einem folgenden Schritt die Differenz der für beide Orte bestimmten Winkel. Diese Differenz entspricht der Differenz der geographischen Breite der Orte [4)].
Die Berechnung kann einfach mit einem Taschenrechner vorgenommen werden. Man kann sie auch zum Anlaß nehmen, entsprechende Fertigkeiten im Umgang mit Tabellenkalkulationen zu vermitteln. Auch jüngeren Schülern, die mit dem Konzept der Winkelfunktionen noch nicht bekannt gemacht wurden, kann man erklären, daß das Verhältnis der Katheten einem gewissen Winkel entspricht, ihn stellvertretend berechnen und sie so von der Ermittlung dieses Winkels entbinden. Das schränkt die Erfahrung des Selbermachens jedoch ein. Abgesehen davon, wollten wir auch auf Winkelfunktionen verzichten, weil sie Eratosthenes mutmaßlich auch nicht zur Verfügung standen. Also:

mit Kreide und Tafel
Alternativ kann man die Sache auch grafisch an der Tafel bewältigen. Man zeichnet die gemessenen und protokollierten Schattenwurfsituationen maßstabsgerecht an die Tafel und mißt die Winkel mit dem großen Tafelwinkelmesser und berechnet deren Differenz. Abschließend bestimmt man aus der gewonnenen Proportion den Erdumfang: Die Winkeldifferenz verhält sich zur Entfernung der Orte wie 360° zum Erdumfang. Bei sorgfältiger Arbeit wird man zu Ergebnissen gelangen, die den modernen Kenntnissen nahekommen oder ihnen entsprechen [5)].

Quellen

1)	Eratosthenes	Kleine Enzyklopädie Natur, 1966, S. 423
2)	Eratosthenes:	http://de.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes
3)	Stadion:	Lexikon der Antike, 1977
4)	Stufenwinkel, Wechselwinkel	http://de.wikipedia.org/wiki/Winkel
5)	Erde: (Äquatordurchmesser: 12756Km)	http://de.wikipedia.org/wiki/Erde

Über die Entfernung Erde-Mond und die Größe des Mondes
Bei einer Mondfinsternis kreuzt der Mond den Erdschatten. Es wird vereinfachend unterstellt, der Mond kreuze den Erdschatten längs seines Durchmessers. Das vorausgesetzt, soll das Verhältnis von Monddurchmesser und Erddurchmesser gewonnen werden.

Bei einer totalen Mondfinsternis kann der Beobachter das Vorhandensein eines Kernschattens und eines Halbschattens bemerken. In den Kernschatten getaucht, erscheint der Mond zuweilen kupferrot. Der Rand des Kernschattens ist auf der Mondoberfläche deutlich zu erkennen. Dies kann für den Halbschatten nicht gesagt werden. Dennoch ist er zu bemerken, da die Helligkeit des Mondes nach dem Passieren des Kernschattens weiter zunimmt, bis dieser etwa einen Monddurchmesser vom Kernschatten entfernt ist.

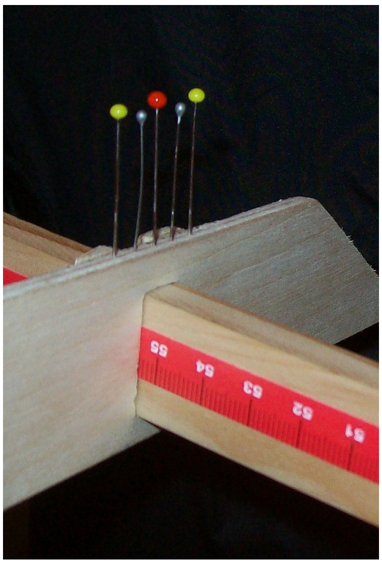

Abbildung 3: Detail eines Jakobstabs mit Nadeln

Wenn aber Halbschatten und Kernschatten zu beobachten sind, so ist der Durchmesser der Sonne, die dies hervorruft, größer als der Durchmesser der Erde. Der scheinbare

Durchmesser der Sonne beträgt etwa 0,5°, was wir selbstverständlich nicht so hinnehmen wollen. Wir wollen dies selbst messen. Auf eine Leiste stecken wir in einer Entfernung von 57,3cm von dem einen Ende quer zur Blickrichtung einige Stecknadeln im Abstand von 5mm in das Holz. In der Abbildung wurde dies an einem Jakobstab vorgenommen. Dadurch sind die Nadeln leicht zu positionieren und auch die Handhabung ist recht einfach. Ein Kreis mit einem Radius von 57,3cm hat einen Umfang von etwa 360cm. Ein Zentimeter der Peripherie entspricht damit etwa einem Grad, der Abstand unserer Nadeln von 5mm markiert jeweils 0,5°. Damit messen wir den scheinbaren Durchmesser der Sonnenscheibe. Hier ist Vorsicht geboten. Es gibt nur zwei Gelegenheiten, zu denen dies ohne Gefahr für die Augen zu erledigen ist: Sonnenaufgang und Sonnenuntergang. Schüler sind mit Nachdruck darauf hinzuweisen.

Die Messung wird uns zweierlei lehren, nämlich daß der scheinbare Durchmesser der Sonne tatsächlich etwa 0,5° beträgt und auch, daß man unter günstigen Umständen durchaus noch kleinere Teile eines Grads mit dieser einfachen Vorrichtung bestimmen kann (Nadelbreite und Vielfache davon). Beträgt nun der scheinbare Durchmesser der Sonne 0,5°, ergibt sich daraus unmittelbar eine untere Grenze für die Entfernung Erde-Sonne. Wenn der Kreis mit dem Radius r der Entfernung Erde-Sonne den Umfang von 720 Sonnendurchmessern (720 Sonnen von jeweils 0,5° Breite) hat, der seinerseits mindestens von der Größe des Erddurchmessers ist, so ergibt sich der Umfang U zu 720 * 12756 Km = 9 184 320 Km und entsprechend der Radius r = 1 462 471 Km. Danach liegt die untere Grenze für die Entfernung Erde – Sonne bei ca. 114 Erddurchmessern. Dies ist hilfreich, um sich vorstellen zu können, daß die Sehstrahlen, die Halbschatten und Kernschatten begrenzen, vergleichsweise kleine Winkel mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte von Sonne und Erde bilden.

Bestimmt man weiter die Breite des Kernschattens bei einer Mondfinsternis mit 2,65 Monddurchmessern und die Breite des Halbschattens mit jeweils 1 Monddurchmesser östlich und westlich des Kernschattens, so ergibt sich damit die Breite des vom Mond passierten Schattens zu 4,65 Monddurchmessern [1)]. Hier muß man vermutlich meist auf „Fremddaten“ zurückgreifen, da eine Mondfinsternis nur selten zum geeigneten Zeitpunkt anstehen wird.

Der Erddurchmesser wird also zwischen 2,65 und 4,65 Monddurchmessern liegen. Die Proportion 2,65 / 4,65 von Kernschatten zu Gesamtschatten legt die Vermutung nahe, daß die Ebene dieser Schattenbreite (in der Entfernung des Mondes von der Erde) relativ nahe bei der Erde ist, gemessen an der Länge des Kernschattens von der Erde bis zum Scheitelpunkt. Deshalb mag die Näherung zulässig sein, die Halbschatten auf beiden Seiten des Kernschattens jeweils zu halbieren, um eine Vorstellung zu gewinnen, wie groß der Erddurchmesser, ausgedrückt in Monddurchmessern ist: So läßt sich nun annehmen, der Mond passiere auf einer Strecke von 3,65 Monddurchmessern die Breite des Erddurchmessers. Dies war jüngst bei der Mondfinsternis am 10.12.2011 für manche Beobachter zu erkennen.

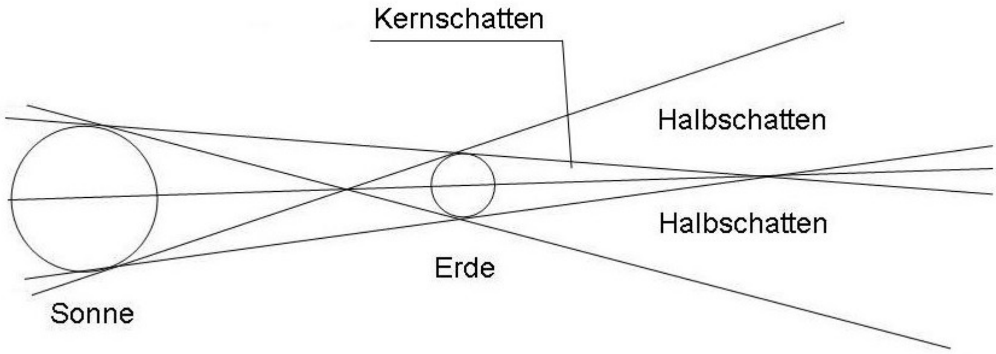

Abbildung 4: Halbschatten und Kernschatten der Erde, nicht maßstäblich

Wenn also 3,65 Monddurchmesser dem Durchmesser der Erde von d_E = 12 756 Km entsprechen, gewinnen wir den Monddurchmesser zu d_M = 3 495 Km. Wie zuvor bei der Sonne, stellen wir uns die Mondbahn als ein 720-Eck vor, da der Mond einen scheinbaren Durchmesser von gleichfalls etwa 0,5° hat,was wir nun leicht überprüfen können. Dies führt uns zu einer Bahnlänge von 2 516 252 Km, bzw. zu einer Entfernung Erde-Mond von 400 677 Km.

Eratosthenes hätte die Entfernung Erde – Mond mit den unterstellten Mitteln und ausgehend von seiner Untersuchung des Erdumfangs vermutlich so bestimmen können.

1) Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Mondfinsternis, 20.12.11

Über die Entfernung Erde – Sonne und die Größe der Sonne

Werfen wir einen Blick auf die Bemühungen in der Vergangenheit, um die Entfernungen Erde – Mond bzw. Erde – Sonne zu bestimmen.

Eratosthenes (-276, -194),
Erdumfang = 252 000 Stadien [1],
über Größe und Entfernung des Mondes
äußerte sich E. in „Über die Vermessung der Erde“ [1]

Archimedes (-287, -212) [2]
Beweis des Strahlensatzes [3] Das hat zwar erst einmal nichts mit der Distanz Erde – Sonne zu tun, unterstützt aber die Annahme, daß Eratosthenes davon gewußt haben könnte.

Aristarchos (-320, -250),
Erddurchmesser = 2,85 x Monddurchmesser (Mondfinsternis) [4]
Erde – Sonne = 19,1 Mondabstände [4]

Hipparchos (-190, -120)
Präzession der Erdachse, Armillarsphäre
Erde – Mond = 30 Erddurchmesser [5]
Erde – Sonne = 1210 Erdradien [4]

Ptolemaios (85 - 165)
Erde – Sonne = 1210 Erdradien [6]

Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) und Tycho Brahe (1546 - 1601)
Erde –Sonne = 1142 Erdradien [6]

Galileo Galilei (1564 – 1642)
Monddurchmesser : Erddurchmesser = 2 : 7
Erde – Mond = 60 Erdradien [7]

Horrox (1619 – 1641)
Erde – Sonne = 95 Millionen Kilometer [8]

Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) (9)
Erde – Sonne = 11 000 Erddurchmesser [9) 10)]

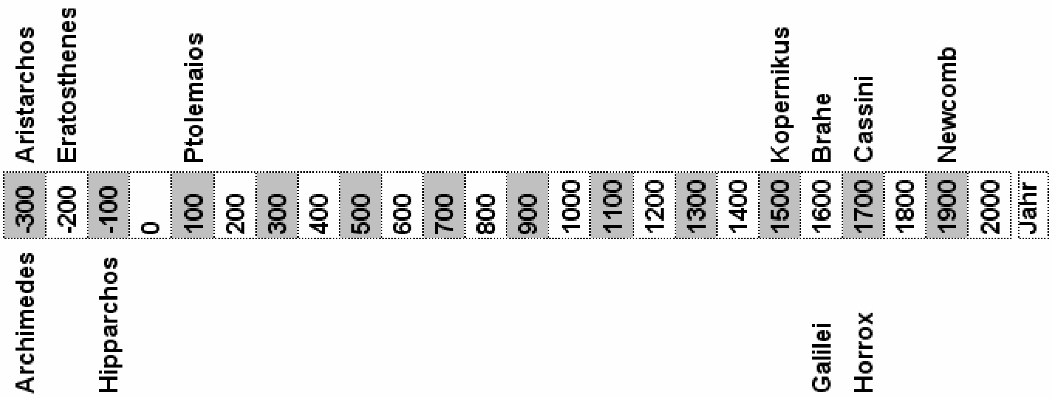

Abbildung 5: astronomische Forschung und Stagnation

Bis in die Neuzeit hinein hatte man also nur eine recht unvollkommene Vorstellung von der fraglichen Entfernung. Wie nachzulesen ist, versuchte man, die Entfernung aus Parallaxenmessungen abzuleiten. Dies läuft zumeist darauf hinaus, einen kleinen Winkel mit sehr großer Genauigkeit zu bestimmen – nichts für uns, die mit Zollstock und Nadeln bzw. einem Jakobstab umgehen. [11)]
Um die Entfernung Erde – Sonne und den Durchmesser der Sonne zu bestimmen, wird deshalb vorgeschlagen, die Verhältnisse bei einer Sonnenfinsternis und bei einer Mondfinsternis jeweils mit einem Ansatz zu beschreiben, der die wesentlichen Längen in Form der aus den Strahlensätzen bekannten Proportionen gibt.
Dabei bleiben bei beiden Darstellungen jeweils die Entfernung Erde – Sonne und der Durchmesser der Sonne unbekannt. Die Verknüpfung der beiden linearen Gleichungen mit denselben beiden unbekannten Größen führt zu einer Lösung, die die gesuchten Längen gibt.

1) Sonnenfinsternis

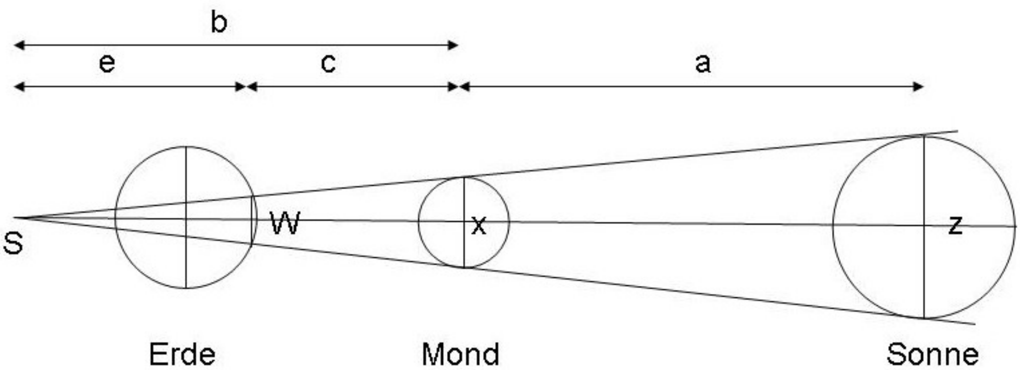

Abb 6: Erde, Mond, Sonne bei einer Sonnenfinsternis, nicht maßstäblich

Erde - Mond [Km]	c	384 400
Mond – Sonne [Km]	a	
Durchmesser des Mondschattens [km]	w	270
Durchmesser des Mondes [Km]	x	3 476
Durchmesser der Sonne [Km]	z	

a = (bz - xb) / x

2) Mondfinsternis

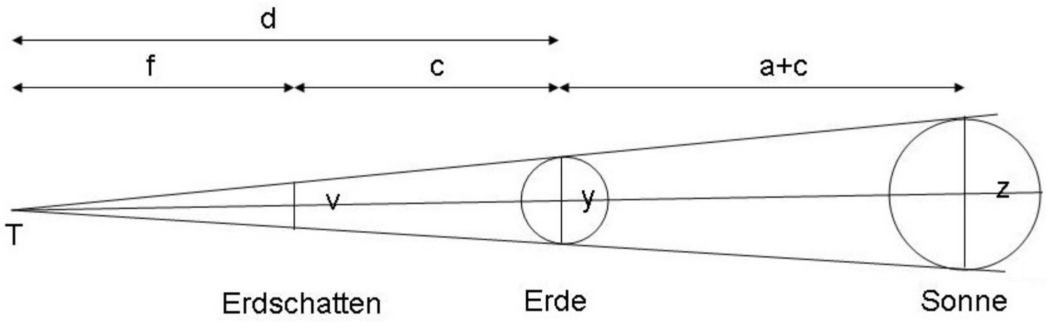

Abb. 7: Erde, Mond, Sonne bei einer Mondfinsternis, nicht maßstäblich

Durchmesser Erdschatten [Km]	v	9 582
Durchmesser Erde [Km]	y	12 756
Durchmesser Sonne [Km]	z	

a = (dz – yd – yc) / y

Die Schattendurchmesser ergeben sich etwa als gewichtete Durchschnitte aus Untersuchungen einer Wertetabelle mit verschiedenen Wertepaaren für die Schatten.

Verknüpfung beider "Strahlensatz-Ansätze"
a = (bz – xb) / x aus der Situation bei Sonnenfinsternis
a = (dz – yd – yc) / y aus der Situation bei Mondfinsternis
führt zu **(bz – xb) / x = (dz – yd – yc) / y** und ergibt die gesuchten Längen:

Durchmesser der Sonne [km]	z	**1 251 211**
Sonne – Erde [Km]	a + c	**149 988 075**

Mit 12 756 Km Erddurchmesser entspricht die Entfernung also etwa 23 516 Erdradien. Erst Simon Newcomb (1895) bestimmte die Entfernung Erde – Sonne zu 23 440 Erdradien. [11)] und kam damit näher an den modernen Wert von 23 455 Erdradien heran. Es scheint, Eratosthenes hätte diese Untersuchung führen und damit einen Wert gewinnen können, mit dem er sehr lange recht gut ausgesehen hätte.
Aber selbstverständlich ist dies nur eine Gedankenspielerei. Es ist offensichtlich, daß die Schwierigkeit im vorgeschlagenen Verfahren darin liegt, zuverlässige Angaben über die beiden Schattendurchmesser zu gewinnen. Das ist gewissermaßen der Preis dafür, keine Parallaxen zu messen. Eratosthenes hätte in der Nachbarschaft vermutlich recht geduldig herumfragen müssen, um herauszufinden, wie groß der Schatten bei der letzten totalen Sonnenfinsternis war, die bekanntlich nicht besonders häufig eintreten.
Andererseits ergibt sich bei der Untersuchung einiger Wertepaare für die Schattendurchmesser, daß die Intervalle für die beiden Größen, die überhaupt Ergebnisse liefern, recht klein sind (ältere Schüler können das z.B. mit Hilfe geeigneter Tabellenkalkulationsprogramme untersuchen). Es wäre für Eratosthenes wohl schwierig aber eben nicht unmöglich gewesen. Auch dies kann mit den Schülern diskutiert werden. Wichtiger ist in diesem Projekt aber die Anregung für das Handeln der Schüler und das Vergnügen, selbst zu entdecken.

Quellen

1) http://de.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes, 20.12.11

2) http://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes, 20.12.11
3) http://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz, 20.12.11
4) http://de.wikipedia.org/wiki/Aristarchos_von_Samos, 20.12.11
5) http://de.wikipedia.org/wiki/Hipparchos_(Astronom), 20.12.11
6) http://www.venus-transit.de/distance/index.html, 15.12.11
7) Galileo Galilei, “Sidereus Nuncius”, (1610), Suhrkamp 1965
8) http://de.wikipedia.org/wiki/Jeremia_Horrocks, 20.12.11
9) http://de.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Domenico_Cassini, 20.12.11
10) http://de.wikipedia.org/wiki/Ole_R%C3%B8mer, 20.12.11
11) http://en.wikipedia.org/wiki/Astronomical_unit (25.12.2011 11:27)

heute gebräuchliche Werte

Erddurchmesser	12 756 Km
Monddurchmesser	3 476 Km
Sonnendurchmesser	1 391 600 Km
Entfernung Erde – Mond	384 400 Km
Entfernung Erde – Sonne	149 600 000 Km

Quelle: „Tabellen und Formeln“, Dresden, 1976